

1. Stereometria- úvod



Pozorne si naštuduj nasledujúce pojmy. V prípade nejasností sa neváhaj pýtať.

Základné útvary v priestore:

- **Elementárne útvary:** elementárnymi geometrickými útvarmi v priestore sú body, priamky a roviny.

- **Bod**

Bod je elementárny prvok geometrického priestoru. Geometrický bod je abstraktný pojem, bezrozmerný útvar, ktorý nemá žiadny rozmer, teda žiadnu dĺžku, šírku, ani výšku. Jedinou charakteristickou vlastnosťou bodu v geometrickom priestore je jeho poloha. Reprezentovať túto polohu číselne môžeme v zvolenej súradnicovej sústave priestoru, v ktorej sú každému bodu jednoznačne priradené jeho súradnice. Označenie bodov: **A, B, ...**

- **Rovina**

Rovina je dvojrozmerný geometrický útvar, ktorý nemá žiadnu výšku, ale jeho vybrané podmnožiny majú merateľnú "šírku" a "dĺžku". Rovina rozdelí priestor na dva polpriestory. Rovinu chápeme ako množinu bodov. Body ležia v rovine alebo rovina obsahuje body.

Rovina je jednoznačne určená :

- *tromi bodmi, ktoré neležia na jednej priamke,*
- *dvomi rôznobežnými priamkami,*
- *priamkou a bodom, ktorý na priamke neleží .*

Označenie rovín $\alpha, \beta; \dots$ resp. $ABC^{\leftrightarrow}, KLM^{\leftrightarrow} \dots$

- **Priamka**

Priamka je prienikom dvoch rôznobežných rovín. Je to jednorozmerný geometrický útvar, ktorý nemá žiadnu šírku ani výšku, ale jeho vybrané podmnožiny majú merateľnú "dĺžku". Priamku chápeme ako množinu bodov. Hovoríme, že body ležia na priamke, alebo priamka prechádza bodmi.

Označenie priamok $p, q; \dots$ resp. $AB^{\leftrightarrow}, CD^{\leftrightarrow}; \dots$

- **Symbolické zápisy:**

- bod A leží na priamke p : $A \in p$
- bod B neleží na priamke p : $B \notin p$

- bod A leží v rovine α : $A \in \alpha$
- bod B neleží v rovine α : $B \notin \alpha$
- priamka p leží v rovine α : $p \in \alpha$ (priamka p je podmnožina roviny α)

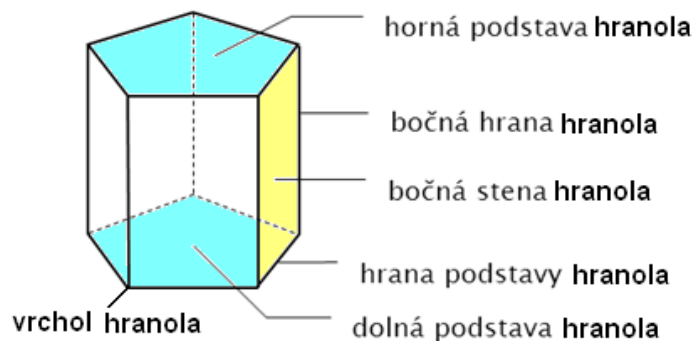
Telesá:

- **Teleso** nazývame každý priestorový uzavretý útvar.
- Delenie elementárnych telies napr.:
 - hranaté telesá: n –boké hranoly , n –boký ihlan
 - oblé telesá: rotačný valec, rotačný kužeľ, guľa



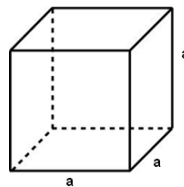
Hranol

- má dve zhodné podstavy, ktoré ležia v dvoch rovnobežných rovinách,
- výška hranola - vzdialenosť podstáv,
- plášť hranola tvoria všetky steny – rovnobežníky
- **Kolmý hranol** má roviny stien kolmé na roviny podstavy.
- **Pravidelný kolmý hranol** je kolmý hranol s podstavou tvaru pravidelného n -uholníka.



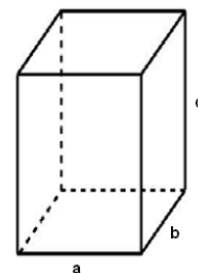
Špeciálne kolmé hranoly:

- **Kocka** - pravidelný štvorboký kolmý hranol,



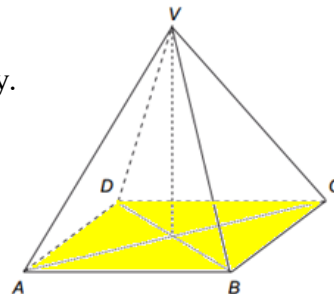
- **Kváder** - štvorboký kolmý hranol,

- ktorého všetky hrany majú rovnakú veľkosť.
- ktorý má obdĺžnikové steny.

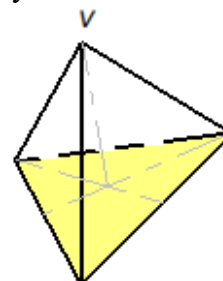


- **Ihlan**

- Ihlan je teleso, ktoré má 1 podstavu (rovinný mnohouholník) ktorého vrcholy sú priamočiario spojené s bodom, ktorý neleží v rovine mnohouholníka (vrchol ihlana)
- Steny ihlana sú trojuholníky.
- Výška ihlana je vzdialenosť vrchola ihlana od jeho podstavy.
- Na obrázku je zobrazený pravidelný štvorboký ihlan.



- **Pravidelný n-boký ihlan** - ihlan, ktorého podstava je pravidelný n-uholník so stredom S a všetky jeho bočné steny sú zhodné rovnoramenné trojuholníky so základňami v podstavných hranách pravidelného n-bokého ihlanu.
- **Štvorsten** – je ihlan s trojuholníkovou podstavou, je to mnohosten so 4 stranami tvaru trojuholníka.



Pozri si aj nasledujúce videá:

- [Úvod do stereometrie – video 1](#)
- [Úvod do stereometrie – video 2](#)
- [Úvod do stereometrie – video 3](#)



V rámci prípravy na diskusiu v triede si zisti a priprav **jednu zaujímavosť o stereometrii**. Môžeš sa inšpirovať týmito otázkami:

- Ako sa geometria vyvíjala v histórii?
- Akú úlohu zohrala stereometria v architektúre alebo astronómii?
- Ako stereometria ovplyvňuje techniku alebo moderné technológie?



Na ďalšej hodine sa budeme rozprávať o týchto témach:

- Aký je rozdiel medzi bodom, priamkou, rovinou a telesom?
- Aké telesá poznáme v každodennom živote?
- Kde sa stretávame so stereometriou (v technike, architektúre, prírode)?

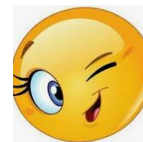
2. Zobrazenia priestorových útvarov do roviny



Pozorne si naštuduj nasledujúce pojmy. V prípade nejasností sa neváhaj pýtať.

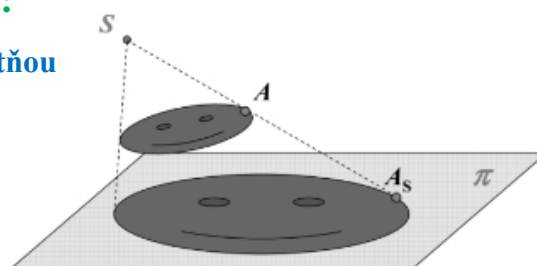
Premietanie:

- Spôsob ako trojrozmerné objekty previesť na dvojrozmerný papier.
- Časť informácie sa stratí, ale stále stojí za to, urobiť to čo najlepšie



- **Stredové premietanie (perspektíva):**
- **Je jednoznačne určené stredom a priemetňou**

- π - priemetňa
- S - stred premietania
- Nie je zobrazovacou metódou
- Takto vníma ľudské oko



- **Špeciálny prípad- lineárna perspektíva** (hlavne v technickej praxi)



Pozri si nasledujúce videá:

- [Video 1: Ako funguje lineárna perspektíva](#) (základy lineárnej perspektívy)
- [Video 2: Ako kresliť s lineárnou perspektívou](#) (praktická ukážka)



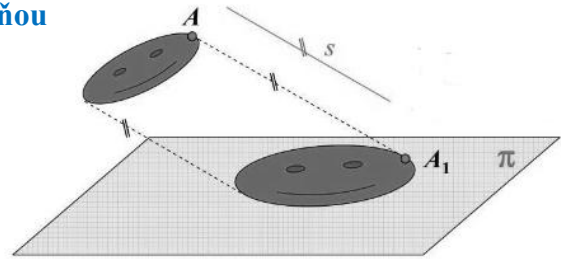
Vypracuj krátke odpovede na tieto otázky:

1. Čo je horizontálna čiara a aký má význam pri kreslení v perspektíve?
2. Na čo slúži ústredný bod?
3. Ako sa mení veľkosť objektov, keď sa vzdľahujú od pozorovateľa?

- **Ravnobežné premietanie:**

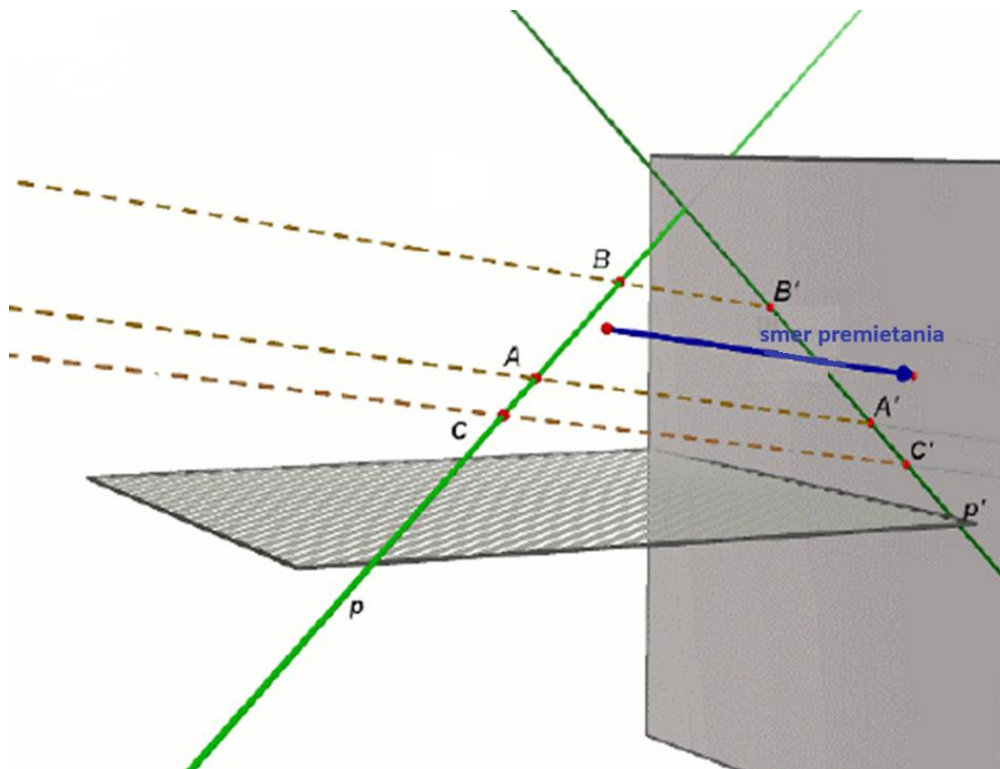
- **Je jednoznačne určené smerom a priemetňou**

- π - priemetňa
- s - smer premietania
- AA_1 - premietacia priamka bodu A
- Premieta sa na rovinu (priemetňu)
- Smer premietania nie je ravnobežný s priemetňou
- Zachováva ravnobežnosť



- **Pravidlá pre ravnobežné premietanie:**

1. Obrazom priamky je priamka alebo bod
2. Obrazom dvoch ravnobežných priamok sú dve ravnobežné priamky alebo dva body
3. Zhodné a navzájom ravnobežné úsečky sa premietajú do úsečiek, ktoré sú tiež zhodné a navzájom ravnobežné (alebo je priemetom každej z nich bod).
4. Útvar, ktorý leží v priemetni alebo v rovine s priemetňou ravnobežnej (priečelná rovina) sa premietajú do útvaru, ktorý je s ním zhodný





Vypracuj krátke odpovede na tieto otázky:

1. Kedy zobrazuje rovnobežné premietanie úsečku na bod?
2. Kedy rovnobežné premietanie zachováva dĺžku úsečky?
3. Zobrazí rovnobežné premietanie rovnobežné priamky ako rovnobežky?



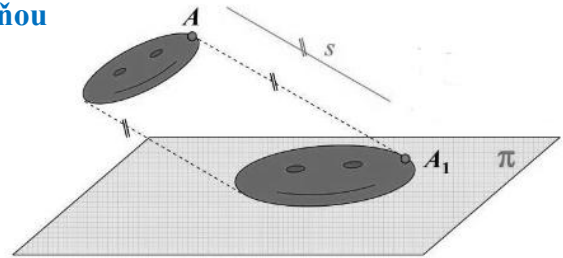
Na nasledujúcej hodine sa budeme rozprávať o týchto témach:

- Ako narysovať obraz kocky v lineárnej perspektíve?
- Ako narysovať obraz kocky v rovnobežnom premietaní?
- V čom sa zhodujú tieto zobrazenia, v čom sú rozdiely?

3. Voľné rovnobežné premietanie

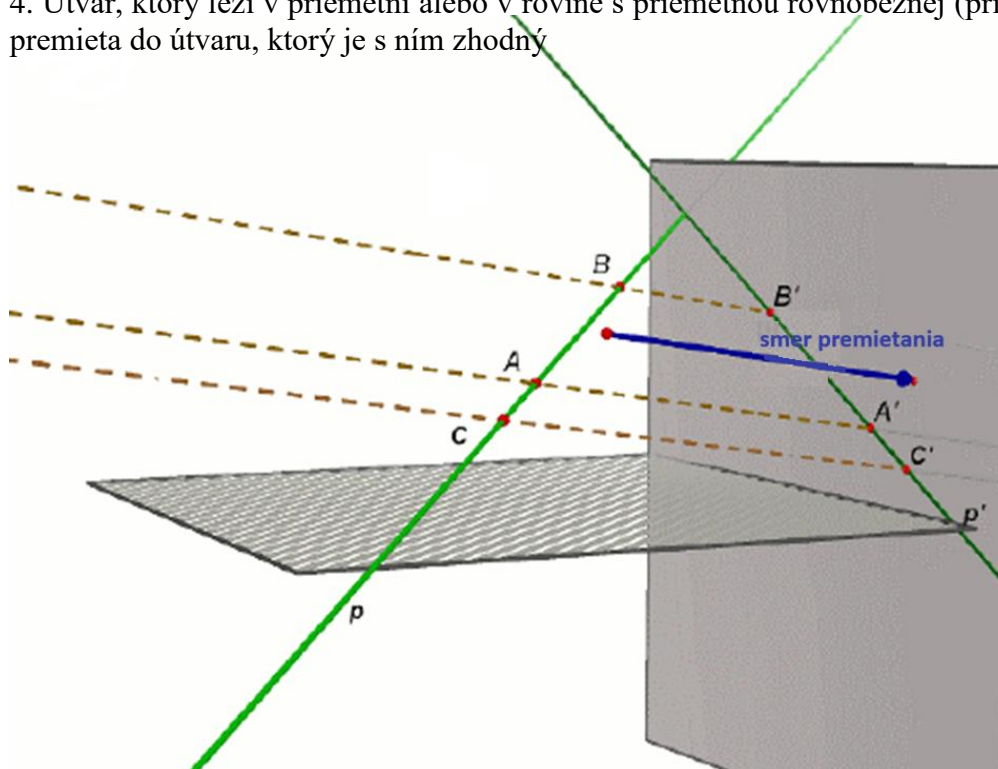


- **Ravnobežné premietanie:**
- **Je jednoznačne určené smerom a priemetňou**
- π - priemetňa
- s - smer premietania
- AA_1 - premietacia priamka bodu A
- Premieta sa na rovinu (priemetňu)
- Smer premietania nie je rovnobežný s priemetňou
- Zachováva rovnobežnosť



- **Pravidlá pre rovnobežné premietanie:**

1. Obrazom priamky je priamka alebo bod
2. Obrazom dvoch rovnobežných priamok sú dve rovnobežné priamky alebo dva body
3. Zhodné a navzájom rovnobežné úsečky sa premietajú do úsečiek, ktoré sú tiež zhodné a navzájom rovnobežné (alebo je priemetom každej z nich bod).
4. Útvar, ktorý leží v priemetni alebo v rovine s priemetňou rovnobežnej (priečelná rovina) sa premieta do útvaru, ktorý je s ním zhodný



- **Voľné rovnobežné premietanie je špeciálne rovnobežné premietanie, v ktorom bude taký smer zobrazenia, že úsečky kolmé na priemetňu sa zobrazia v polovičnej veľkosti a pod uhlom 45° k priemetni**



Pozri si nasledujúce videá, ktoré vysvetľujú základy voľného rovnobežného premietania:

1. **Kolmé rovnobežné premietanie:** <https://www.youtube.com/watch?v=F30X6QKpayo>
2. **Šikmé rovnobežné premietanie:** <https://www.youtube.com/watch?v=tCWny3BsFdQ>
3. **Kocka vo voľnom rovnobežnom premietaní:**
<https://www.youtube.com/watch?v=ngKf87Gikls>
4. **Pravidelný štvorboký ihlan vo voľnom rovnobežnom premietaní:**
<https://www.youtube.com/watch?v=8AczzxP5718>
5. **Geogebra:** <https://www.geogebra.org/m/fZxwA7qJ>

Pokyny k videám:

- Pri sledovaní videí sa sústreď na:
 - Definíciu rovnobežného premietania.
 - Rozdiely medzi kolmým a šikmým premietaním.
 - Postup pri premietaní jednoduchých geometrických útvarov.



Vypracuj krátke odpovede na tieto otázky:

4. Kedy zobrazuje rovnobežné premietanie úsečku na bod?
5. Kedy rovnobežné premietanie zachováva dĺžku úsečky?
6. Zobrazí rovnobežné premietanie rovnobežné priamky ako rovnobežky?



Na nasledujúcej hodine sa budeme rozprávať o týchto témach:

- Ako narysovať obraz kocky v rovnobežnom premietaní.
- Ako narysovať rôzne telesá vo voľnom rovnobežnom premietaní.

4. Základné vzťahy medzi bodmi, priamkami a rovinami



- bod A leží (neleží) na priamke p : $A \in p$, ($A \notin p$)
- bod A leží (neleží) v rovine α : $A \in \alpha$, ($A \notin \alpha$)
- priamka p leží (neleží) v rovine α : $p \subset \alpha$ (priamka p je podmnožina roviny α), ($p \not\subset \alpha$)
- Priamka p prechádza (neprechádza) bodom A : $A \in p$, ($A \notin p$)
- Rovina α prechádza (neprechádza) bodom A : $A \in \alpha$, ($A \notin \alpha$)

Priamka p leží v rovine α (neprechádza) : $p \subset \alpha$ ($p \subset \alpha$)



- Pozri si nasledujúce videá, ktoré vysvetľujú základné vzťahy medzi bodmi, priamkami a rovinami
- <https://www.youtube.com/watch?v=J8IyYgc0GhI>
- <https://www.youtube.com/watch?v=YrAQIYvAPnw&list=PLI4TDB61Yk3Cie8ydyPqN0XUpPjALUO4W>

Pokyny k videám:

- Pri sledovaní videa sa sústreď na:
 - Základné vzťahy medzi bodom a priamkou
 - Základné vzťahy medzi bodom a rovinou
 - Základné vzťahy medzi priamkou a rovinou



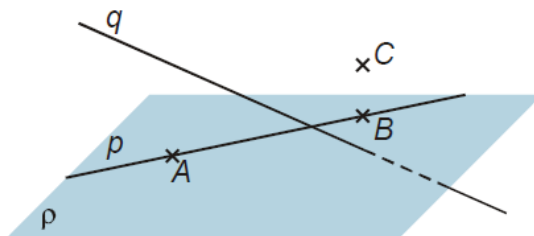
Vypracuj krátku odpoveď na otázku:

4. Prečo sa pre zápis „priamka leží v rovine“ nepoužíva zápis $p \in \alpha$?
5. Akými spôsobmi môže byť pomocou bodov a priamok **jednoznačne** určená rovina?
6. Prečo sa štvornohý stôl môže na rozdiel od trojnohého kývať?



Na nasledujúcej hodine sa budeme riešiť tieto úlohy:

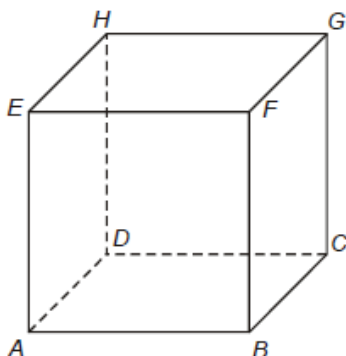
1. Zapište situáciu na obrázku pomocou vzťahov medzi bodmi, priamkami a rovinou.



2. Načrtnite obrázok pre situáciu: $A \in p$, $p \subset \rho$, $B \in q$, $q \subset \rho$
3. Nájdite všetky spôsoby, ako môže byť pomocou bodov a priamok jednoznačne určená rovina.
4. Vysvetlite, prečo sa štvornohý stôl môže na rozdiel od trojnohého kývať?
5. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zakreslite do jej obrázka priamky \overleftrightarrow{ED} , $\overleftrightarrow{AS_{GH}}$ a rozhodnite či ležia v rovine \overleftrightarrow{ADE} .
6. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zakreslite do jej obrázka priamky \overleftrightarrow{EF} , $\overleftrightarrow{AS_{CG}}$ a rozhodnite či ležia v rovine \overleftrightarrow{ACG} .
7. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Rozhodnite, či ležia v jednej rovine body
 - a) B, D, G, H
 - b) $* S_{AE}, S_{AB}, S_{BC}, S_{CG}$
8. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zakreslite do jej obrázka roviny:
 - a) \overleftrightarrow{CGH}
 - b) \overleftrightarrow{BGH}
 - c) \overleftrightarrow{BFH}
 - d) \overleftrightarrow{BCE}

DOHODA:

- S_{AB} - znamená stred úsečky AB
- Štandardnou kockou budeme nazývať kocku $ABCDEFGH$ nakreslenou v nasledujúcej polohe:



5. Vzájomné polohy dvoch priamok v priestore



Pozri si nasledujúce videá, ktoré vysvetľujú vzájomné polohy dvoch priamok v priestore. Pri sledovaní si rob stručné poznámky do zošita.

[Video 1](#)

[Video 2](#)

Pokyny k videám:

- Pri sledovaní videí si všímaj:
 - Ako môžeme klasifikovať vzájomné polohy priamok v priestore?
 - Aké kritériá musia spĺňať priamky, aby boli rovnobežné?
 - Čím sa líšia mimobežky od ostatných polôh?
- Zhrnutie zapíš do tabuľky:

Poloha priamok	Ležia v jednej rovine?	Počet spoločných bodov	Symbolický zápis
Totožné priamky			
Ravnobežné priamky			
Rôznobežné priamky			
Mimobežné priamky			



Klasifikácia:

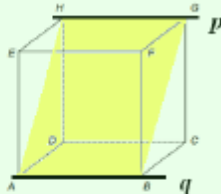
Majme 2 priamky p, q v priestore.



1. p, q ležia v jednej rovine : (určujú rovinu)

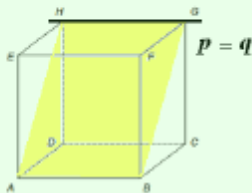
Môžu nastať 3 prípady:

a) p, q sú rovnobežné: $p \parallel q$



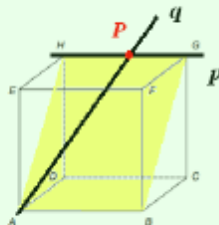
p, q nemajú spoločný bod: $p \cap q = \emptyset$

b) p, q sú totožné (splývajúce): $p = q$



p, q majú všetky body spoločné: $p \cap q = p$

c) p, q sú rôznobežné: $p \# q$

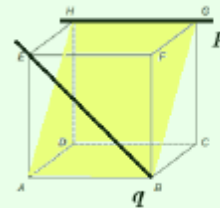


p, q majú spoločný 1 bod: $p \cap q = \{P\}$
 P - sa nazýva priesečník priamok

2. p, q neležia v jednej rovine

1 možnosť:

p, q sú mimobežné $p \nparallel q$:



p, q nemajú spoločný bod: $p \cap q = \emptyset$



Vytvor model kocky a znázorni na nej rôzne polohy priamok

✦ Materiály, ktoré môžeš použiť:

✓ Špajdle, špáradlá, tuhý drôt

✓ Modelovacia hmota, plastelína na upevnenie

💡 Prečo je to dôležité?

- Pomôže ti to lepšie pochopiť priestorové vzťahy
- Umožní ti to vizuálne skúmať rôzne polohy priamok

📷 Bonusová úloha: Odfot' svoj model a prines ho na ďalšiu hodinu.

4. Reflexia a príprava na hodinu

Pred hodinou si polož otázky:

- Aké sú hlavné rozdiely medzi rovnobežnými a mimobežnými priamkami?
- Ako dokážem pomocou dôkazov určiť vzájomnú polohu priamok?
- Viem si predstaviť všetky možné polohy priamok v priestore?

📖 Dodatočné zdroje na štúdium:

- Stereometria – učebnica matematiky pre 3. ročník gymnázia
- Online nástroj na 3D modelovanie geometrie (napr. GeoGebra)



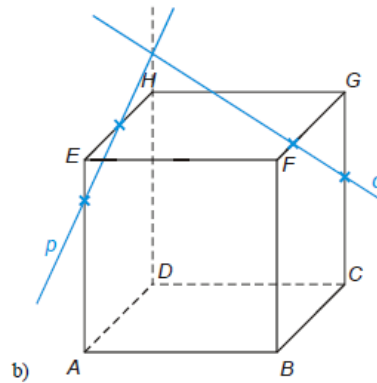
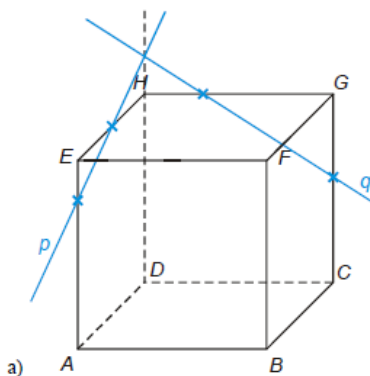
Na nasledujúcej hodine sa budeme riešiť tieto úlohy:

1. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Určte vzájomnú polohu priamok

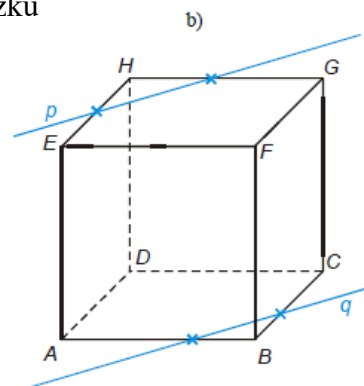
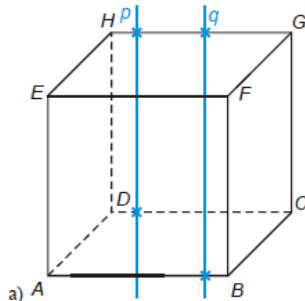
- a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CG}$ b) $\overrightarrow{AS_{CG}}, \overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{S_{BC}S_{CD}}$ d) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{S_{AE}S_{DH}}$ e) $\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BH}$

2.* Dokážte, že v kocke $ABCDEFGH$ platí: $\overrightarrow{S_{AE}S_{CG}} \parallel \overrightarrow{S_{AB}S_{BC}}$

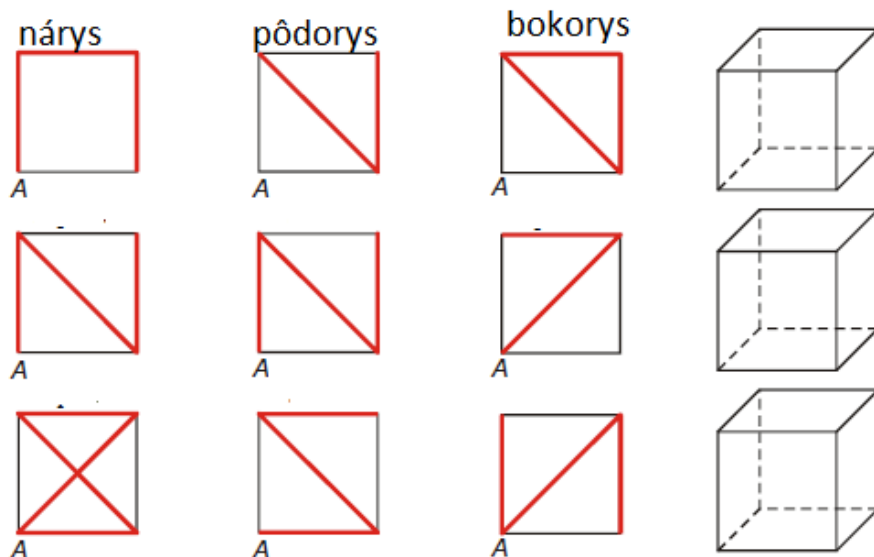
3. Určte vzájomnú polohu priamok na obrázku ak priesečníky priamok s hranami kocky ležia presne strede hrany. :



4. Určte vzájomnú polohu priamok na obrázku



5. Sklenená kocka je zdobená lomenou čiarou z červeného drôtu. Drôt môže byť natiahnutý tak po stenách ako aj vo vnútri kocky. Zakreslite drôt do voľného rovnobežného priemetu kocky na základe nárysu, pôdorysu a bokorysu:



Zdroj:

Realisticky.cz, [05 Vzájomná poloha dvoch priamok - A](#), (Slavomír Tuleja), [VZÁJOMNÁ POLOHA PRIAMOK v PRIESTORE - vysvetlenie](#) (MATYKÁR)

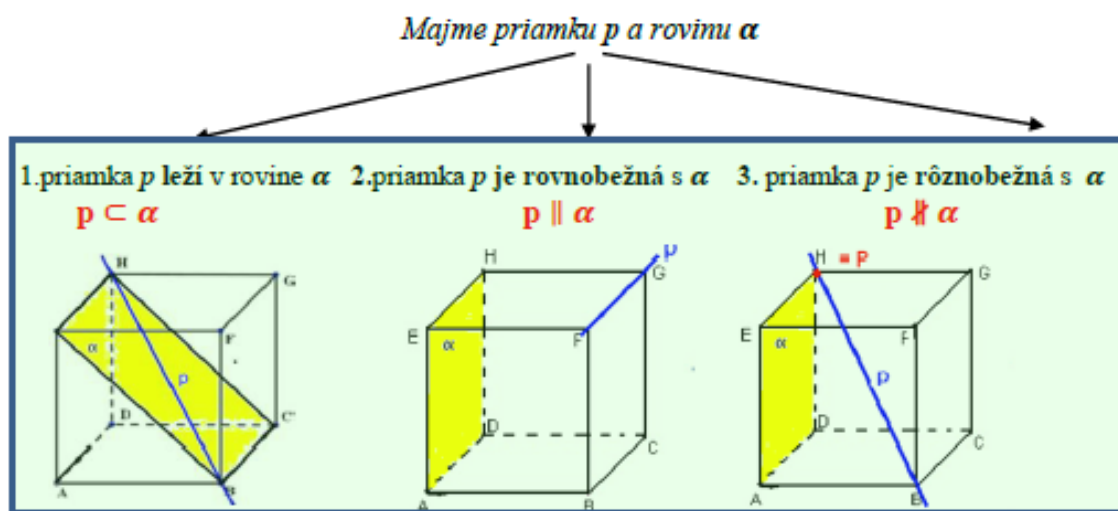
6. Vzájomné polohy priamky s rovinou, dvoch rovín v priestore



Vzájomná poloha priamky s rovinou:

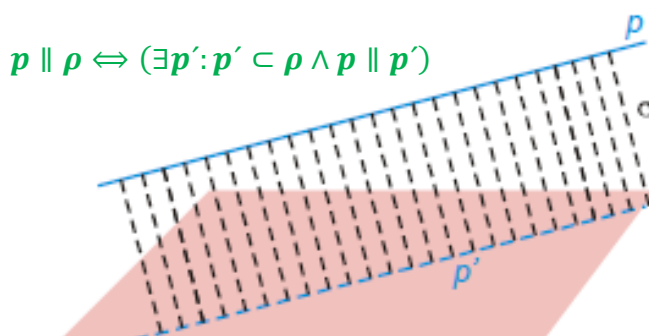
V priestore môže mať priamka p vo vzťahu k rovine α tri možné polohy:

1. **Priamka leží v rovine**
Priamka p leží celá v rovine α
2. **Priamka je rovnobežná s rovinou**
Priamka p je rovnobežná s rovinou α , ale neleží v nej.
3. **Priamka je rôznobežná s rovinou**
Priamka p pretína rovinu α v jednom bode.



Kritérium rovnobežnosti priamky a roviny:

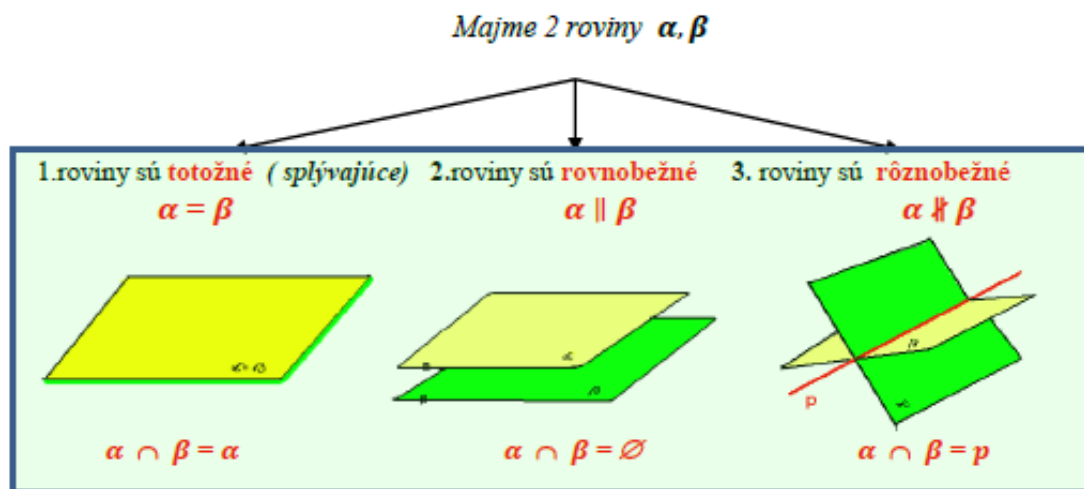
Priamka p je rovnobežná s rovinou ρ práve vtedy, keď v rovine ρ leží aspoň jedna priamka p' , ktorá je s priamkou p rovnobežná.



Vzájomná poloha dvoch rovín:

V priestore môžu byť dve roviny α a β vo vzťahu k sebe v troch polohách:

1. **Roviny sú totožné (splývajúce)**
Roviny majú všetky body spoločné.
2. **Roviny sú rovnobežné**
Roviny nemajú žiaden spoločný bod.
3. **Roviny sú rôznobežné**
Roviny sa pretínajú v priamke.



Kritérium rovnobežnosti dvoch rovín:

Dve roviny sú rovnobežné práve vtedy, keď jedna z rovín obsahuje dve rôznobežné priamky, ktoré sú rovnobežné s druhou rovinou.



Pozri si nasledujúce videá, ktoré vysvetľujú vzájomné polohy priamky s rovinou, dvoch rovín v priestore

- Priamky: <https://www.youtube.com/watch?v=4T6rNCFGvrA>
<https://www.youtube.com/watch?v=oKYaBajROAg>
<https://www.youtube.com/watch?v=N-TE3l2KnBc>
- Roviny:
<https://www.youtube.com/watch?v=AouVzgnzk14>
<https://www.youtube.com/watch?v=GWEh0Uvyjrs>

Pokyny k videám:

- Pri sledovaní videí sa sústreď na:
 - Klasifikáciu (triedenie) vzájomných polôh priamky a roviny
 - Kritériá rovnobežnosti priamky a roviny
 - Klasifikáciu (triedenie) vzájomných polôh dvoch rovín
 - Kritériá rovnobežnosti dvoch rovín



Vytvor model kocky a prines ho na sledujúcu hodinu. Požit' môžeš napr. tuhší drôd, špilky,... Rovnako si priprav aspoň dva modely priamok a model roviny.



Počas nasledujúcej hodiny budeme riešiť tieto úlohy:

Vzájomná poloha priamky a roviny

1. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Určte všetky priamky určené vrcholmi kocky a prechádzajúce bodom F , ktoré sú:
a) Rovnobežné s rovinou \overleftrightarrow{ADE} b) rôznobežné s rovinou \overleftrightarrow{ADE}
2. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Určte všetky roviny určené vrcholmi kocky a prechádzajúce bodom G , ktoré sú:
a) Rovnobežné s priamkou \overleftrightarrow{AC} b) rôznobežné s rovinou \overleftrightarrow{AC}
3. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Určte vzájomnú polohu :
a) priamky $\overleftrightarrow{S_{EG}S_{BG}}$ a roviny \overleftrightarrow{ABC}
b) priamky $\overleftrightarrow{S_{AC}S_{BG}}$ a roviny \overleftrightarrow{CDG}
c) priamky $\overleftrightarrow{S_{BG}S_{AH}}$ a roviny \overleftrightarrow{CDE}
d) priamky $\overleftrightarrow{S_{EG}S_{BG}}$ a roviny \overleftrightarrow{BCE}
e) priamky $\overleftrightarrow{S_{EG}S_{BF}}$ a roviny \overleftrightarrow{ABG}
4. *Je daná kocka $ABCDEFGH$. Veďte bodom S_{AB} priamku rovnobežnú s rovinami \overleftrightarrow{BEG} , \overleftrightarrow{BDH}

Vzájomná poloha 2 rovín

1 Na kocke $ABCDEFGH$ zistíte vzájomnú polohu rovín α, β a tvrdenie zdôvodnite.

- a) $\alpha = \overleftrightarrow{S_{FB}S_{FG}S_{FE}}$, $\beta = \overleftrightarrow{EBG}$
- b) $\alpha = \overleftrightarrow{ACG}$, $\beta = \overleftrightarrow{DHF}$
- c) $\alpha = \overleftrightarrow{ACG}$, $\beta = \overleftrightarrow{ES_{AC}S_{EG}}$

2. Dokážte, že rovina $\alpha = \overleftrightarrow{ACH}$ je rovnobežná s rovinou $\beta = \overleftrightarrow{BEG}$

3. Na kocke $ABCDEFGH$ zistíte vzájomnú polohu rovín $\overleftrightarrow{S_{FB}S_{FG}S_{FE}}$, \overleftrightarrow{DFB} a tvrdenie zdôvodnite.

4. Dokážte, že rovina $\overleftrightarrow{S_{FB}S_{FG}S_{FE}}$ je rovnobežná s rovinou \overleftrightarrow{ACH} .

7. Rezy telies I.



- **Rez telesa rovinou je prienik roviny s telesom**
- ❑ **Zostrojujeme priesečnice roviny so stenami telesa.**
- ❑ **Nezaujímajú nás (preto ich nekreslíme 😊) úsečky, ktoré prechádzajú vnútrom telesa.**

Rezom je rovinný konvexný útvar - mnohoúholník, ktorého strany sú priesečnice rezovej roviny ρ so stenami telesa T .

Z toho dôvodu sa rez vyznačuje len na povrchu telesa aj s patričnou viditeľnosťou.



- Video: Rôzne tvary rezov kocky:
<https://www.youtube.com/watch?v=T9Jezv2Vkck&list=PL2f01xzKRkB6qyx6pnqHAs1dgV2wlpKY3&index=44>
- Video: Označovanie rezov:
<https://www.youtube.com/watch?v=mSPyBlm39Fk&list=PL2f01xzKRkB6qyx6pnqHAs1dgV2wlpKY3&index=45>

Rez kocky

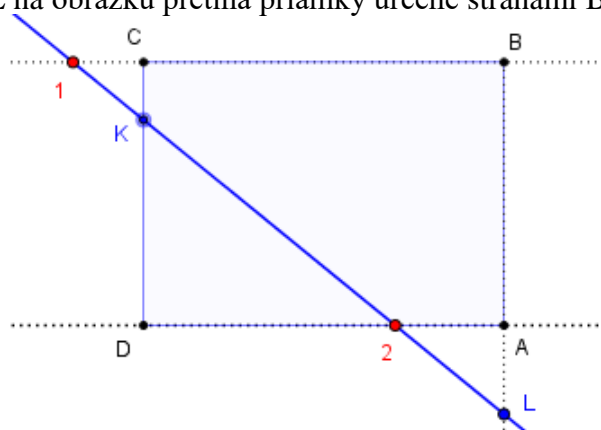
- **Prvé pravidlo- pravidlo spájania bodov:**

Ak dva body ležia v rovine, tak priamka nimi určená leží tiež v tejto rovine

- ❑ Ak poznáme v ľubovoľnej stene telesa dva rôzne body roviny rezu, zostrojíme ich spojnicu. Prienik tejto spojnice a steny telesa je jednou stranou rezu.

- ❑ Nech dva body K, L ležia v stene $ABCD$ daného telesa. Priamka určená bodmi K, L pretína priamky určené stranami štvoruholníka $ABCD$, ktoré sú s ňou rôznobežné.

Napríklad priamka K, L na obrázku pretína priamky určené stranami BC, AD v bodoch 1, 2, 1, 2.





Video: Pravidlo spájania bodov

<https://www.youtube.com/watch?v=ZQP5soZLn3k&list=PL2f01xzKRkB6qyx6pnqHAs1dgV2wlpKY3&index=46>

Vyskúšaj si: <https://www.geogebra.org/m/wn7SmmjC>



Vypracuj krátke odpovede na tieto otázky:

- Ktoré mnohoúhelníky môžu byť rezom kocky?

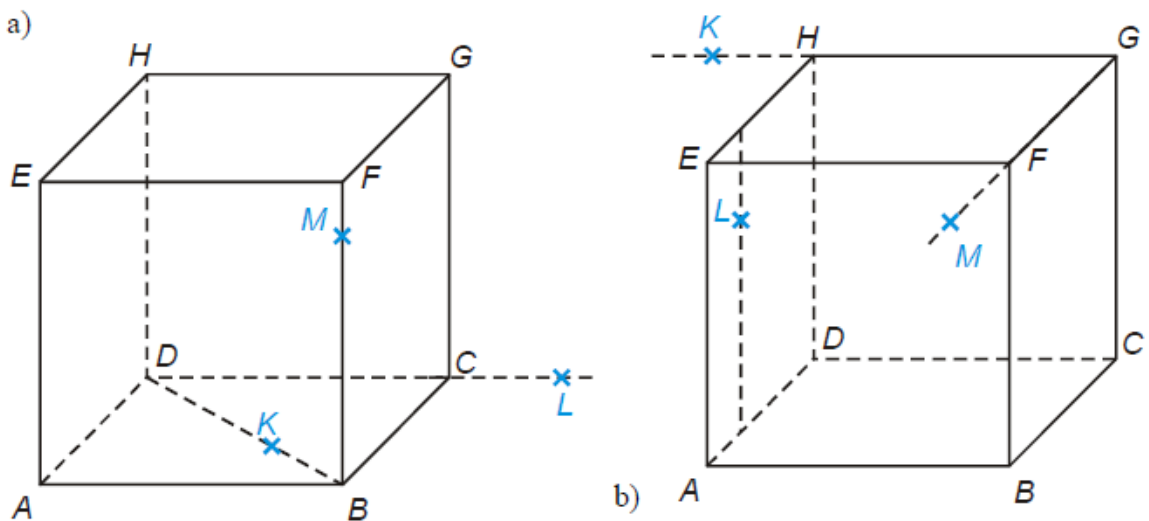


Na nasledujúcej hodine sa budeme riešiť tieto úlohy:

1. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez tejto kocky rovinou:

- $\overleftrightarrow{S_{ABF\bar{C}}}$
- $\overleftrightarrow{S_{AE\bar{B}D}}$
- $\overleftrightarrow{S_{BC\bar{S}CH\bar{G}}}$

2. Zostrojte rezy kocky $ABCDEFGH$ rovinami určenými bodmi K, L, M .




3. *Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez tejto kocky rovinou:

- \overleftrightarrow{KLM} , kde K leží na polpriamke \overleftrightarrow{AB} , $|KA| = \frac{3}{2}|AB|$, L leží na polpriamke \overleftrightarrow{AE} , $|LA| = \frac{3}{2}|AE|$ a M leží na polpriamke \overleftrightarrow{FG} , $|MF| = \frac{3}{2}|FG|$.
- \overleftrightarrow{KLM} , kde K leží na polpriamke \overleftrightarrow{BA} , $|KA| = \frac{1}{2}|AB|$, L leží na polpriamke \overleftrightarrow{BF} , $|LB| = \frac{3}{2}|BF|$ a M leží na polpriamke \overleftrightarrow{EH} , $|MH| = \frac{3}{2}|EH|$.

8. Rezy telies II.



- **Rez telesa rovinou- prienik roviny s telesom**
- ❑ **Zostrojujeme priesečnice roviny so stenami telesa.**
- ❑ **Nezaujímajú nás (preto ich nekreslíme ) úsečky, ktoré prechádzajú vnútrom telesa.**

Rez kocky

- **Druhé pravidlo- pravidlo konštrukcie rovnobežiek:**

Dve rovnobežné roviny pretína tretia rovina v dvoch rovnobežných priamkach.

- ❑ **Ak sú roviny dvoch stien rovnobežné a pritom rôznobežné s rovinou rezu, sú priesečnice roviny rezu s rovinami týchto stien rovnobežné.**



Video: Pravidlo konštrukcie rovnobežiek:

<https://www.youtube.com/watch?v=Hhbtsz8hgaQ&list=PL2f01xzKRkB6qyx6pnqHAs1dgV2wlpKY3&index=47>

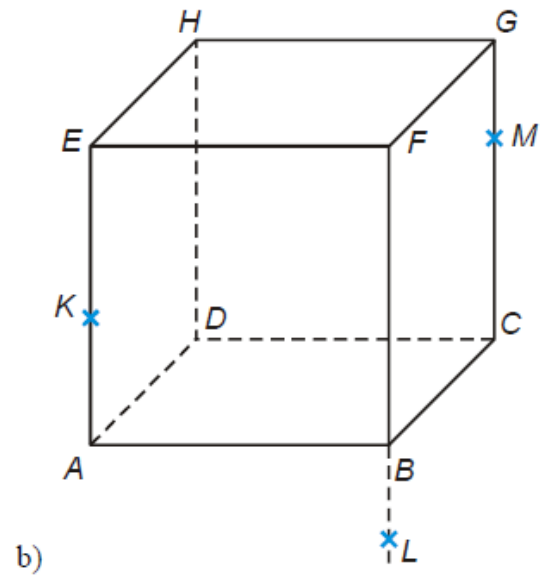
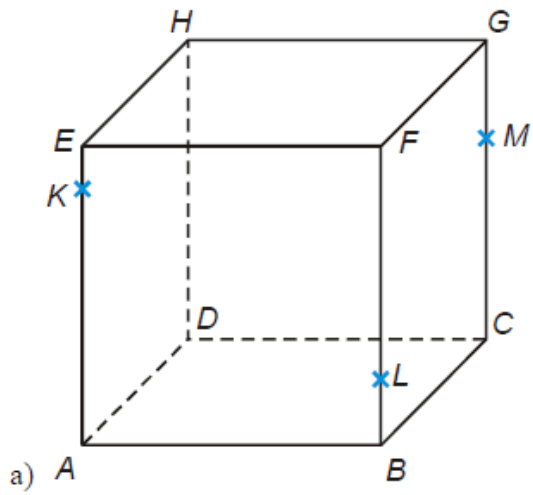
Vyskúšaj si: <https://www.geogebra.org/m/ecrSWpb9#material/aVLwd7ql>



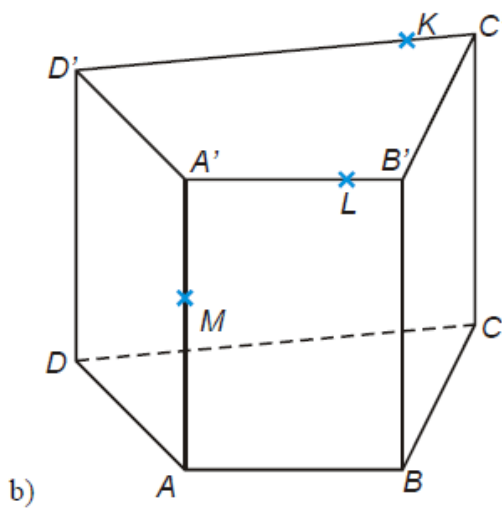
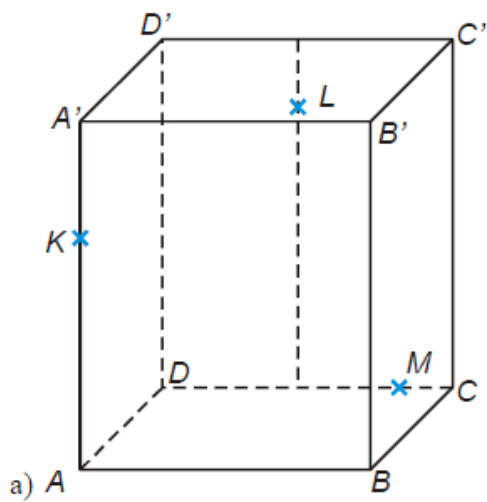
Na nasledujúcej hodine sa budeme riešiť tieto úlohy:

1. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez tejto kocky rovinou: $\overleftrightarrow{ABS_{CG}}$
2. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte rez tejto kocky rovinou:
 - a) $\overleftrightarrow{BS_{AE}S_{CG}}$
 - b) $\overleftrightarrow{AHS_{BF}}$
 - c) $\overleftrightarrow{CS_{BF}S_{EF}}$

3. Zostrojte rezy kocky $ABCDEFGH$ rovinami určenými bodmi K, L, M .




4. *Zostrojte rezy telies rovinami určenými bodmi K, L, M .



9. Rezy telies III.



- **Rez telesa rovinou- prienik roviny s telesom**
- ❑ **Zostrojujeme priesečnice roviny so stenami telesa.**
- ❑ **Nezaujímajú nás (preto ich nekreslíme ) úsečky, ktoré prechádzajú vnútrom telesa.**

Rez kocky

- **Tretie pravidlo- pravidlo predlžovania hrán:**

Ak sú každé dve z troch rovín rôznobežné a ak majú tieto tri roviny jediný spoločný bod, prechádzajú týmto spoločným bodom všetky tri priesečnice.

- ❑ **Ak poznáme jednu stranu rezu, môžeme ju predĺžiť do ostatných stien. Priesečníky s ostatnými stenami nájdeme tak, že predĺžime hranu, ktorá**
 - **Leží v rovine, v ktorej je predlžovaná úsečka**
 - **Leží v rovine, v ktorej potrebujeme nájsť ďalší bod a nájdeme jej priesečník s neznámou stranou rezu**

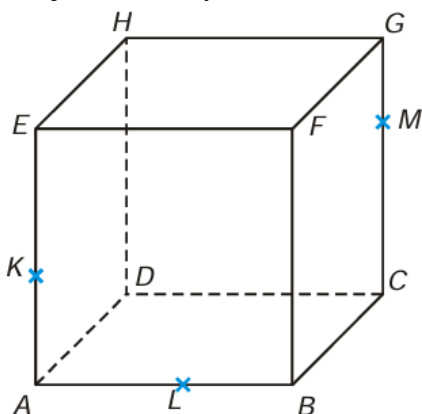


<https://www.youtube.com/watch?v=ghEPOFvagBk&list=PL2f01xzKRkB6qyx6pnqHAs1dgV2wlpKY3&index=48>



Na nasledujúcej hodine budeme riešiť tieto úlohy:

1. Zostrojte rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou KLM



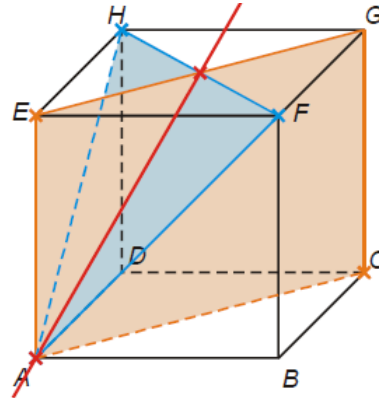
2. Je daná kocka **ABCDEFGH**. Zostrojte
- a) Priesečníky priamky $S_{AB}S_{BC}$ s rovinami stien AED a CDG ,
 - b) Priesečníky priamky $S_{BF}S_{FG}$ s rovinami stien CDG a ABC ,
 - c) Priesečníky priamky $S_{CG}S_{DC}$ s rovinami stien EFG a ADE ,
 - d) Priesečníky priamky $S_{EF}S_{EH}$ s rovinami stien CDG a BCF .
3. Je daná kocka **ABCDEFGH**. Zostrojte zvyšné priesečníky zadaných priamok s rovinami určenými stenami kocky
- a) $S_{AB}S_{AD}$ b) $S_{AE}S_{EF}$ c) $S_{CG}S_{FG}$
 - e) $S_{CG}S_{GH}$ d) $S_{BC}S_{AE}$
4. Je daná kocka **ABCDEFGH**. Zostrojte rez tejto kocky rovinou:
- a) $S_{AB}S_{BC}S_{DH}$ b) $S_{BF}S_{FG}S_{GH}$ c) $S_{AB}S_{BF}S_{EH}$

10. Priesečnica dvoch rovín



- Dve rôznobežné roviny majú spoločnú práve jednu priamku. Táto priamka sa nazýva **priesečnica**.

- Zostrojíme rezy telesa pre obe roviny
- Hľadáme spoločné body oboch rezov v jednotlivých stenách (najlepšie 2 😊)
- Spojíme nájdené body



Pozri si nasledujúce videá:

Video 1: Konštrukcia priesečnice 2 rovín:

<https://www.youtube.com/watch?v=qjBixmodRZE>

Video 2: Konštrukcia priesečnice 2 rovín:

https://www.youtube.com/watch?v=6iMHBhNWW_8



Na nasledujúcej hodine budeme riešiť tieto úlohy:

1. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečnicu rovín \overleftrightarrow{AFH} a \overleftrightarrow{ACE} .
2. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečnicu rovín $\overleftrightarrow{AS_{BF}G}$ a $\overleftrightarrow{CS_{BC}}$.
3. *Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečnicu rovín
 - a) \overleftrightarrow{ABC} a $\overleftrightarrow{EGS_{DH}}$
 - b) \overleftrightarrow{ACH} a \overleftrightarrow{EFG}
4. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečnicu rovín
 - a) $\overleftrightarrow{AS_{AE}S_{GH}}$ a $\overleftrightarrow{BS_{CG}}$
 - b) $\overleftrightarrow{S_{AB}CH}$ a $\overleftrightarrow{BES_{CG}}$
5. *Je daný pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zostrojte priesečnicu roviny $\overleftrightarrow{S_{AV}KL}$ kde $K \in BV$, $|VK| = 4|KB|$ a $L \in BC$, $|BL| = 2|LC|$ s rovinou $\overleftrightarrow{XYS_{CV}}$, kde $X \in AV$, $|XV| = 3|XA|$ a $Y \in AB$, $|AY| = 2|YB|$.

11. Priesečník priamky s rovinou

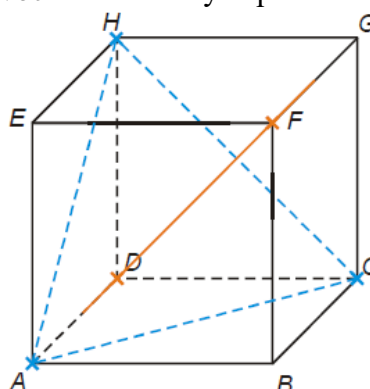


Priamka rôznobežná s rovinou má s ňou spoločný práve jeden bod.
Tento bod nazývame **priesečník**.

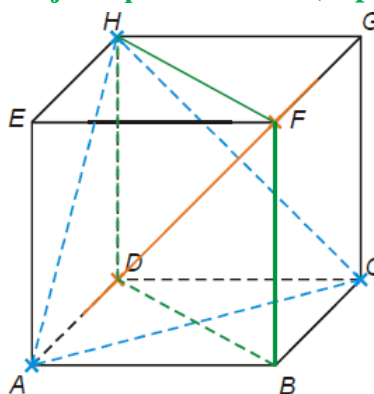
Príklad: Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky \overleftrightarrow{DF} s rovinou \overleftrightarrow{ACH}

Priesečník: nájdeme ako priesečník dvoch rôznobežných priamok. Hľadáme priamku, ktorá:

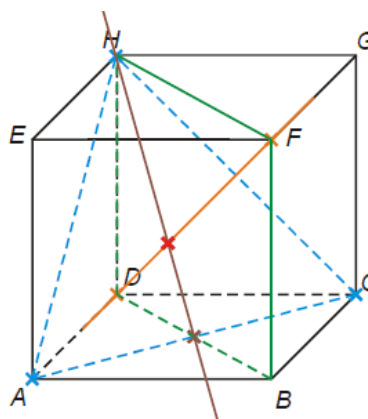
- Leží v rovine \overleftrightarrow{ACH}
- Leží v jednej rovine s \overleftrightarrow{DF}




- Zostrojíme pomocnú rovinu, v ktorej leží priamka \overleftrightarrow{DF} (napr. \overleftrightarrow{BDF})



- Priesečnica rovín \overleftrightarrow{ACH} a \overleftrightarrow{BDF} a priamka \overleftrightarrow{DF} sa pretínajú v jednom bode P



Ako zostrojíme priesečník priamky s rovinou?

- Zostrojíme rezy telesa rovinou, zakreslíme priamku
- Zostrojíme rez telesa ďalšou ľubovoľnou (vhodne zvolenou ) rovinou, ktorá obsahuje priamku
- Zostrojíme priesečnicu oboch rovín
- Priesečník priesečnice a priamky je hľadaným bodom



Pozri si nasledujúce videá:

Video 1: Konštrukcia priesečníka priamky s rovinou:

<https://www.youtube.com/watch?v=8o2PshozQQs>

Video 2: Konštrukcia priesečníka priamky s rovinou:

<https://www.youtube.com/watch?v=I6JHEcw9mBA>



Na nasledujúcej hodine budeme riešiť tieto úlohy:

6. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky \overleftrightarrow{DF} s rovinou \overleftrightarrow{ACH} .
7. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky \overleftrightarrow{DF} s rovinou \overleftrightarrow{ACH} .
Na riešenie použite inú rovinu ako v predchádzajúcom prípade.
8. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky $\overleftrightarrow{S_{AE}S_{GH}}$ s rovinou $\overleftrightarrow{AHS_{BF}}$
9. * Je daný pravidelný štvorboký ihlan $ABDV$. Zostrojte priesečník priamky $\overleftrightarrow{KS_{DV}}$, kde $K \in \overleftrightarrow{AB}$, $|AK| = 1,5|AB|$ s rovinou \overleftrightarrow{BCV}
10. Je daná kocka $ABCDEFGH$. Zostrojte priesečník priamky \overleftrightarrow{KH} s rovinou $\overleftrightarrow{GS_{BF}S_{AD}}$

12. Uhol dvoch priamok



- **Uhlom dvoch priamok nazývame veľkosť nulového, ostrého alebo pravého uhla, ktorého ramená ležia na daných priamkach.**
- Uhol dvoch rovnobežných priamok je veľkosť každého z ostrých alebo pravých uhlov, ktoré priamky spolu zvierajú.
- Uhol dvoch rovnobežných priamok je 0°
- Uhol dvoch mimobežných priamok je uhol rôznobežných priamok vedených ľubovoľným bodom priestoru rovnobežne s danými mimobežkami.
- \Rightarrow podľa definície prevedieme všetky príklady do roviny a v nej to spočítame



Pozri si nasledujúce videá, ktoré vysvetľujú výpočet uhla dvoch priamok v priestore

- Uhol dvoch priamok: <https://www.youtube.com/watch?v=HvmitQaVzfM>
- Uhol dvoch priamok- vysvetlenie, príklady:
<https://www.youtube.com/watch?v=jguFfAYUyXQ>



Zopakuj si:

7. Goniometrické funkcie v pravouhlom trojuholníku.
8. Sínusová veta.
9. Kosínusová veta.



Na nasledujúcej hodine budeme riešiť tieto príklady:

Príklad 1: Je daná kocka $ABCDEFGH$. Určte uhol priamok:

- a) $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AE}$
- b) $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AD}$
- c) $\overleftrightarrow{AE}, \overleftrightarrow{AF}$
- d) $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BD}$
- e) $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{GH}$
- f) $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{FG}$
- g) $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{S_{AE}F}$

Príklad 2: Je daná kocka $ABCDEFGH$. Určte uhol priamok:

- a) $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{HF}$
- b) $\overleftrightarrow{DE}, \overleftrightarrow{BG}$
- c) $\overleftrightarrow{AH}, \overleftrightarrow{BE}$

Príklad 3*: Je daná kocka $ABCDEFGH$. Určte uhol priamok $\overleftrightarrow{CE}, \overleftrightarrow{AH}$

Príklad 4: Je daná kocka $ABCDEFGH$. Určte uhol priamok $\overleftrightarrow{S_{GH}}, \overleftrightarrow{S_{AB}E}$

Príklad 5*: Je daný pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. $|AB| = a = 5\text{cm}$,

$|AV| = b = 7\text{cm}$. Určte uhol priamok \overleftrightarrow{CV} a $\overleftrightarrow{AS_{DV}}$